

Levenberg-Marquardt 算法在测风激光雷达中的应用

周小林¹, 孙东松¹, 钟志庆¹, 王邦新¹, 夏海云², 董晶晶¹, 沈法华¹, 刘东¹

(1.中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽 合肥 230031;

2.北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

摘要: 分析了直接探测测风激光雷达中的 Fabry-Perot 标准具透过率的非线性理论模型。根据实验测量数据, 利用 Levenberg-Marquardt 算法对理论模型进行参数优化估值, 获得测量数据的最佳拟合曲线。数值计算表明, pseudo-Voigt 函数能快速且很好地近似计算 Voigt 线形。对于 Fabry-Perot 标准具的宽带光透过率频谱响应曲线, 可以采用 Voigt 函数拟合, 也可以采用 pseudo-Voigt 函数拟合; 当透过率频谱响应曲线用于风速反演时, 若采用 pseudo-Voigt 函数拟合会造成低于 1 m/s 的测速偏差, 因此必须采用 Voigt 函数拟合。

关键词: 激光雷达; Fabry-Perot 标准具; Lorentz 函数; Voigt 函数; pseudo-Voigt 函数; Levenberg-Marquardt 算法

中图分类号: TN248.42 文献标识码: A 文章编号: 1007-2276(2007)04-0500-05

Application of Levenberg-Marquardt algorithm in the wind lidar

ZHOU Xiao-lin¹, SUN Dong-song¹, ZHONG Zhi-qing¹, WANG Bang-xin¹,
XIA Hai-yun², DONG Jing-jing¹, SHEN Fa-hua¹, LIU Dong¹

(1. Institute of Anhui Optics and Fine Mechanics, Academy of Science, Hefei 230031, China;

2. School of Instrument Science and Photo-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract: Nonlinear theoretical models of the Fabry-Perot etalon's transmittance in the direct detection wind lidar are analyzed. With experimental datum, the models parameters are optimized with Levenberg-Marquardt algorithm, and for the best fitting curve of Fabry-Perot etalon transmittance. By numerical calculation, it is indicated that pseudo-Voigt function can approach approximated the Voigt profile well and quickly. Both Voigt function and pseudo-Voigt function can be used for fitting the responsive curve of Fabry-Perot etalon transmittance with pulsed laser. But Voigt function should be employed for fitting the Fabry-Perot etalon transmittance curve for the recovery wind velocity, if pseudo-Voigt function is employed, there will be a velocity error which is less than 1 m/s.

Key words: Lidar; Fabry-Perot etalon; Lorentz function; Voigt function; pseudo-Voigt function; Levenberg-Marquardt algorithm

收稿日期: 2006-08-30; 修订日期: 2006-09-13

基金项目: 中国科学院知识创新工程基金资助项目(Cx0201); 中国科学院百人计划基金资助项目(202032403130)

作者简介: 周小林(1982-), 男, 湖南邵阳人, 硕士生, 主要从事激光雷达信号与数据处理方面的研究。

Email: laokai134@126.com

导师简介: 孙东松(1962-), 男, 江苏江阴人, 研究员, 博士生导师, 博士, 主要从事激光雷达大气遥感、成像激光雷达方面的研究。

Email: dssun@aiofm.ac.cn

0 引言

直接探测测风激光雷达是利用光的多普勒效应, 测量激光光束在大气中传输其后向散射信号的多普勒频移来反演空间风速分布。在边缘探测技术中, 将激光频率(参考光)锁定在高分辨率鉴频器透过率曲线的半宽度位置附近。由于曲线斜率大, 微小的多普勒频移使鉴频器透过率发生明显变化^[1-2]。Fabry-Perot 标准具作为激光雷达系统中的鉴频器, 将频率信号的变化转化为相对能量信号的变化来测定大气粒子的多普勒频移。在边缘技术中, 可以采用单边缘技术(使用1个 Fabry-Perot 标准具), 也可以采用双边缘技术(使用2个相同的 Fabry-Perot 标准具, 但频谱有一定间隔), 基本原理是相同的, 但双边缘技术探测性能要优于单边缘技术^[3]。

由于 Fabry-Perot 标准具的透过率曲线是非线性曲线, 通常是根据最小二乘原理来求拟合曲线模型参数的最佳优化值。主要方法有: 最速下降法, Gauss-Newton 法和 Levenberg-Marquardt (L-M) 算法。大量计算实践表明, 最速下降法求解稳定性好, 但收敛速度太慢, 有时失去实用价值; Gauss-Newton 法求解速度快, 但在解线性方程组的过程中容易出现奇异矩阵和非正定矩阵, 使迭代无法继续进行, 并且 Gauss-Newton 法对模型参数初值敏感, 设置不当, 使迭代无法收敛。L-M 算法通过引入阻尼因子, 在迭代过程中动态调整阻尼因子, 吸收最速下降法和 Gauss-Newton 法的优点, 使求解过程快速稳定^[4-5]。

文中详细分析了 Fabry-Perot 标准具透过率的理论模型。根据双 Fabry-Perot 标准具透过率的实验测量数据, 利用 L-M 算法对理论模型参数进行优化估值。由于 Voigt 函数的计算是一个数值积分问题, 其函数模型参数优化估值过程耗时多; 数值计算表明, 用 pseudo-Voigt 函数代替 Voigt 函数可以快速且很好地拟合出两个 Fabry-Perot 标准具宽带光透过率频谱响应曲线; 但会造成比透过率低两个量级的透过率偏差, 透过率偏差一般会造成低于 1 m/s 的测速偏差。因此, 当透过率曲线用于风速反演时, 仍然需要采用 Voigt 函数拟合; 而其他情况下, 可以采用 pseudo-Voigt 函数拟合。

1 Fabry-Perot 标准具透过率

理想的 Fabry-Perot 标准具的透过率由 Airy 函数

给出。但实际测量受到有限孔径角, Fabry-Perot 标准具平板缺陷和不平行等额外因子展宽的限制。因此, 其中央条纹透过率可以表示为 Lorentz 线型函数分布^[1]:

$$L(\nu) = \frac{2A}{\pi} \frac{\omega}{4(\nu - \nu_c)^2 + \omega^2} \quad (1)$$

式中: ω 为条纹半宽度(FWHM); ν_c 为中心频率, 若条纹峰值为 L_c , 则:

$$A = L_c \omega \pi / 2 \quad (2)$$

在宽带光(脉冲光)带宽内, 可以认为 $L(\nu)$ 为线形, 相当于使用单频激光进行测量^[1]。多级放大的调 Q 激光器中用于种子注入的种子光(窄带光、连续光 CW), 可以很好地满足单频性。因此, 用窄带光测量时, Fabry-Perot 标准具的透过率频谱响应曲线符合 Lorentz 线型函数分布。

实际上, 常采用宽带光进行 Fabry-Perot 标准具透过率测量, 由于激光脉冲具有 Gaussian 谱型分布, 对透过率具有谱展宽作用, Lorentz 函数与 Gaussian 函数卷积将产生 Voigt 函数。用宽带光测量时, 透过率频谱响应曲线符合 Voigt 线型函数分布^[6]。

定义 Gaussian 函数:

$$G(\nu) = A \frac{\sqrt{4\ln 2}}{\sqrt{\pi} \omega} e^{-\frac{4\ln 2}{\omega^2} (\nu - \nu_c)^2} \quad (3)$$

式中: A 为归一化常数(归一化后, $A=1$); ω 为脉冲 FWHM; ν_c 为中心频率。

Voigt 函数:

$$V(\nu) = G \otimes L = \int_{\mathbb{R}} G(\nu) L(\nu - \nu) d\nu \quad (4)$$

式中: \otimes 表示卷积。结合公式(1)、(3)、(4)可写为:

$$V(\nu) = A \frac{2\ln 2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\omega_L}{\omega_G} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{\nu^2}{\omega_G^2}}}{(\sqrt{\ln 2} \frac{\omega_L}{\omega_G})^2 + (\sqrt{4\ln 2} \frac{\nu - \nu_c}{\omega_G})^2} d\nu \quad (5)$$

式中: A 为归一化面积(即透过率曲线围成的面积), FWHM 的 Lorentz 和 Gaussian 分量分别为 ω_L 和 ω_G , ν_c 为中心频率。

公式(5)解析表达式无法求出, 但可用数值积分计算。Voigt 线型函数的形状由比值 ω_L/ω_G 决定。当 $\omega_L/\omega_G \ll 1$ 时, Voigt 函数近似为 Gaussian 函数, 当 $\omega_L/\omega_G \gg 1$ 时, Voigt 函数近似为 Lorentz 函数。若 Voigt 函数可以近似表示为 Lorentz 函数与 Gaussian 函数的线性组合, 同时假定 $\omega_L = \omega_G$, 得到 pseudo-Voigt 函数^[7]:

$$\rho V(\nu) = \eta G(\nu) + (1 - \eta)L(\nu) \quad (6)$$

线性权重因子 η 决定了两种函数的线性组合程度, 解析表达式可写为:

$$pV(\nu) = A \left[\eta \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{4(\nu - \nu_c)^2 + \omega^2} + (1 - \eta) \frac{\sqrt{4\ln 2}}{\sqrt{\pi} \omega} e^{-\frac{4\ln 2}{\omega^2}(\nu - \nu_c)^2} \right] \quad (7)$$

如图 1 所示, 用 pseudo-Voigt 函数近似计算 Voigt 线型造成的最大偏差一般在峰值位置。Fabry-Perot 标准具的理论设计参数 ω_L 约 200 MHz, ω_G 的实验测量值约 60 MHz, 但由于标准具具有一定的漂移和脉冲光的输出受环境(比如温度、振动等)的影响, 比值 ω_L/ω_G 大致在 3 左右。大量透过率测量数据的模型参数估值表明, η 值接近 1。因此, 公式(7)中的 Gauss 函数部分可视为 Lorentz 函数近似处理的修正。下文将通过 L-M 算法对双 Fabry-Perot 标准具的透过率函数模型进行参数估值。并比较了 pseudo-Voigt 函数代替 Voigt 函数拟合标准具宽带光透过率曲线对多普勒测速的影响。

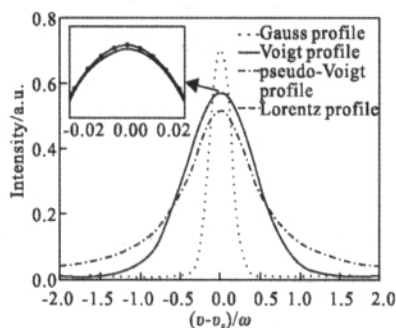


图 1 几种函数线形的比较

Fig.1 Comparison of the line shapes

2 L-M 算法及 Fabry-Perot 标准具透过率函数模型参数估值

2.1 L-M 算法原理

在工程中, 大多数理论模型都是非线性的, L-M 算法是最有效的非线性模型参数估值的方法之一。它灵活地吸收了最速下降法和 Gauss-Newton 法的优点, 又具有类似于神经网络的特点。

设需参数估值的模型是 $y=f(x;\alpha)$, 参数向量 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m)^T$, m 为参数的个数。给定 n 组测量数据点 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 。则模型参数提取问题为:

$$\min_{\alpha} RE(\alpha) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(x_i; \alpha)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (8)$$

对于单次测量 $\sigma_i=1$, 通过求出残差平方和 $RE(\alpha)$

的极小值点来获取模型参数向量 α 。L-M 算法迭代表达式为:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - (H + \mu I)^{-1} \nabla RE(\alpha_k) \quad (9)$$

式中: $H = \nabla^2 RE(\alpha_k)$ 是 Hessian 矩阵; $\nabla RE(\alpha_k)$ 是 $RE(\alpha_k)$ 对参数向量 α_k 偏微分的 Jacobian 矩阵; I 是单位矩阵, k 是迭代次数; 用 Hessian 矩阵 H 的对角矩阵代替单位矩阵 I , 减小计算机字长带来的累积舍入误差的影响, 可以提高计算结果的精度^[4]。因此, 公式(9)可表示为:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - (H + \mu \text{diag}[H])^{-1} \nabla RE(\alpha_k) \quad (10)$$

公式(9)和(10)中的 μ 是阻尼因子, 当 $RE(\alpha_k)$ 减小时, μ 相应减小, 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 公式(10)近似为二阶局部收敛的 Gauss-Newton 法, 即当 $RE(\alpha_k)$ 接近最小值时, 转换到 Gauss-Newton 法; 当 $RE(\alpha_k)$ 增加时, μ 相应增加, 当 $\mu \rightarrow \infty$ 时, 公式(10)近似于线性全局收敛的最速下降法, 即在 $RE(\alpha_k)$ 远离最小值时, 运用最速下降法。

具体算法如下:

- (1) 给定初值 α_0 、 $\mu > 0$ (比如 $\mu = 1.0 \times 10^{-4}$)、 $k=0$ (比如 $\mu = 1.0 \times 10^{-5}$) 及 $k=0$;
- (2) 计算 $RE(\alpha_k)$;
- (3) 求线性方程组(10)的解 $(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$;
- (4) 若 $RE(\alpha_{k+1}) < RE(\alpha_k)$, 则将 μ 增大(比如 10 倍), 返回步骤(3); 反之继续步骤(5);
- (5) 将 μ 缩小(比如 10 倍), 使 $k=k+1$;
- (6) 判断 $\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| < \epsilon$, 若满足结束迭代, 否则返回步骤(3)。

多次迭代的目的是: (1)减小为了得到公式(10)中的 $\nabla^2 RE(\alpha_k)$ 采取的近似计算所带来的误差; (2)动态调整阻尼因子 μ 使每次迭代的残差平方和 $RE(\alpha_k)$ 都有所下降。可见, 只要选择适当的阻尼因子 μ , 就可以兼顾最速下降法和 Gauss-Newton 法的优点, 使迭代收敛快, 求解过程稳定。

2.2 参数初值优化

尽管 L-M 算法在参数初始值的选取范围上有所放宽^[4], 但仍然需要给出较为合理的参数初值, 以使得收敛尽快发生。对于公式(1)、(5)、(7), 均含有一个常参数项, 一般很小(约 10^{-3} 量级), 可以忽略。 ω_L (ω) 约 200 MHz, ω_G 约 60 MHz, η 估值为 0.9, ν_c 可以估计为测量数据中透过率的最大值对应的相对频率。3 个函

数模型中 A 均可按公式(2)粗略估计。

2.3 pseudo-Voigt 函数近似计算精确 Voigt 线形

以双 Fabry-Perot 标准具的宽带光透过率理论曲线为例(Voigt 线型函数分布),两个标准具的频谱间隔为 200 MHz,峰值透过率均为 65.1%,其他参数如上述设置。采样步长为 9.67 MHz (与实际采样步长相同)。用 pseudo-Voigt 函数模型对采样的数据进行模型参数估值,得到两条曲线采样数据的残差平方和均为 0.000 068 4,拟合曲线如图 2 所示。

近似计算造成两个标准具透过率的偏差如图 3 所示,透过率的偏差比透过率低两个数量级,峰值相对偏

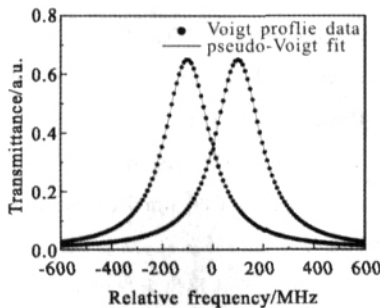


图 2 双 Fabry-Perot 标准具的理论透过率曲线 (pseudo-Voigt 拟合)
Fig.2 Theoretical and optimized transmission of dual Fabry-Perot etalon (pseudo-Voigt fit)

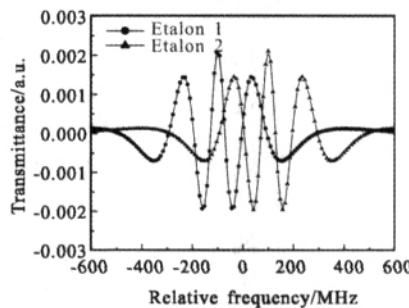


图 3 pseudo-Voigt 函数近似计算精确 Voigt 线形造成的透过率偏差
Fig.3 Transmittance deviation induced by pseudo-Voigt function approximating the exact Voigt profile

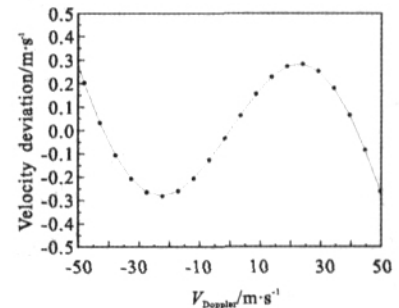


图 4 拟合造成的透过率偏差对多普勒测量的影响
Fig.4 Velocity deviation induced by the transmittance deviation of fitting for Doppler measurement

差均为 0.324%。可以看出, pseudo-Voigt 函数能很好的近似计算 Voigt 线形。实际测风时利用两个标准具透过率峰值之间的频谱,根据参考文献[8]的(3)和(4),可以算出两种模型的差异造成透过率的偏差对多普勒测量的影响如图 4 所示,对于 -50 ~50 m/s 的测速范围,最大偏差为 ± 0.280 m/s(位于 ± 24 m/s 处),对于高分辨率(低对流层探测精度 <1 m/s)测风激光雷达来说,这种偏差偏大。

差均为 0.324%。可以看出, pseudo-Voigt 函数能很好的近似计算 Voigt 线形。实际测风时利用两个标准具透过率峰值之间的频谱,根据参考文献[8]的(3)和(4),可以算出两种模型的差异造成透过率的偏差对多普勒测量的影响如图 4 所示,对于 -50 ~50 m/s 的测速范围,最大偏差为 ± 0.280 m/s(位于 ± 24 m/s 处),对于高分辨率(低对流层探测精度 <1 m/s)测风激光雷达来说,这种偏差偏大。

2.4 Fabry-Perot 标准具透过率的实验测量数据及模型参数估值讨论

相对于脉冲光而言,发射系统中的种子光(窄带

光)具有很好的单频性和稳定性。测量标准具的窄带光透过率,是为了更合理地研究 Fabry-Perot 标准具的特性,如 FWHM、峰值透过率,两个标准具的频谱间隔以及通过与激光脉冲线型函数(Gauss 函数)卷积再和宽带光透过率进行对比等。以 2006 年 3 月 28 日测量的数据为例,拟合曲线如图 5 所示。残差平方和分别为 0.001 14 和 0.001 53。

函数模型和 pseudo-Voigt 函数模型进行模型参数估值。以 2006 年 3 月 24 日一组测量数据为例,拟合曲线如图 6 所示。用 Voigt 函数拟合两个标准具透过率

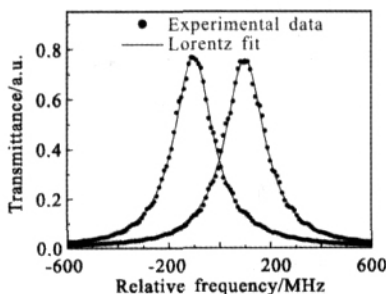


图 5 窄带光透过率曲线(Lorentz 拟合)
Fig.5 Transmittance measured with CW laser (Lorentz fit)

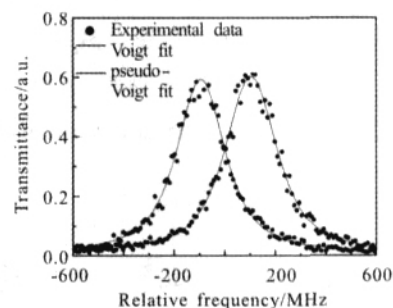


图 6 宽带光透过率曲线(Voigt 拟合和 pseudo-Voigt 拟合)
Fig.6 Transmittance measured with pulsed laser (Voigt fit and pseudo-Voigt fit)

的残差平方和分别为 0.035 1 和 0.044 5,程序运行耗时 35 s;而用 pseudo-Voigt 函数拟合,残差平方和则分别为 0.036 2 和 0.045 0,程序运行耗时 0.075 0 s。由于 Voigt 函数模型的估值过程每迭代一次,都需要进行 n 次积分,其估值过程耗时远大于 pseudo-Voigt

函数模型估值过程耗时;而对于每条透过率曲线,两种模型估值的残差平方和则相近;图 6 中的两条拟合曲线已经基本重合。拟合造成的两个标准具透过率峰值相对偏差分别为 0.773%和 0.767%(图略)。计算拟合造成的透过率偏差对多普勒速度测量的影响,对于 -50 ~50 m/s 的测速范围,最大偏差为 0.599 m/s(约 30 m/s 处,速度偏差曲线与图 4 相似,图略)。对于不同的测量数据,两种函数拟合的透过率偏差比透过率低两个量级,反演出的速度最大偏差一般低于 1 m/s。

大量透过率测量数据的模型参数估值及其程序调试表明, Fabry-Perot 标准具透过率的 Voigt 函数模型对参数初值敏感,初值设置不当,会使迭代过程耗时更多或估算不出结果。因此,如果只需要大致知道两个 Fabry-Perot 标准具的宽带光透过率频谱响应曲线的特征参数,如 FWHM、峰值透过率、两个标准具的频谱间隔、半宽度附近的两条纹交叉点位置等,就可以采用 pseudo-Voigt 函数进行拟合,以减少透过率曲线的获取时间;但透过率曲线用于风速反演时,就需要采用 Voigt 函数拟合;否则会带来较大的测速偏差。分析了 2006 年 2 月 22 日至 3 月 22 日 1 个月内的透过率测量数据,除了标准具条纹中心频率 ν_0 在实验过程中每天都发生漂移外,其他参数基本稳定。而大幅度的频率漂移可以通过伺服系统将两个标准具频谱峰值之间的交叉点锁定到激光的频率上来进行补偿。因此,标准具的长期稳定性好,不需要每次测风之前都进行透过率的测量;当各参数稳定时,就不需要替换反演风速所用的透过率曲线。其他情况下的透过率测量数据,均可以采用 pseudo-Voigt 函数拟合。

3 结束语

在模型参数和测量数据组数比较多的情况下,L-M 算法迭代过程中需要运算高阶方阵,占用较多的内存,影响程序运行的速度。L-M 算法在工程中应用非常有效,并且已经成为非线性最小二乘问题的标准^[9];尤其在参数较少的情况下,L-M 算法求解过程稳定,能得到满意的模型参数优化值。文中分析了 Fabry-Perot 标准具透过率的理论模型,详细介绍了 L-M 算

法,并用 L-M 算法对标准具的几种透过率函数模型进行参数优化估值。实际上,测量标准具宽带光透过率的主要目的就是用来反演风速;但有时候需要短时间内了解透过率各参数的变化情况,或者不用来反演风速时等;就可以采用 pseudo-Voigt 函数拟合,由于 Voigt 函数的计算是一个广义积分问题,计算过程耗时多,因此没有必要用 Voigt 函数拟合。相应的数据处理软件将采用该算法进行大气风场数据的处理,实现软件自动处理风速数据。

参考文献:

- [1] KORB C L, GENTRY B M, WENG C Y. The edge technique theory and application to the lidar measurement of atmospheric winds [J]. *Applied Optics*, 1992, 31(21): 4202- 4212.
- [2] SUN Dong -song, LIU Dong, XIA Hai -yun, et al. Low tropospheric wind profile from a 1.06 μm Doppler lidar [J]. *Infrared and Laser Engineering* (孙东松,刘东,夏海云,等. 1.06 μm 多普勒激光雷达的低对流层风场测量. *红外与激光工程*), 2007, 36(1):52- 56.
- [3] KORB C L, GENTRY B M, LI S X, et al. Theory of the double -edge technique for Doppler lidar wind measurement [J]. *Applied Optics*, 1998, 37 (15):3097- 3104.
- [4] LIU Qin-sheng. *The Algorithm for Least-square Analysis*[M]. Beijing: Press of Beijing University of Technology (刘钦圣. 最小二乘问题计算方法. 北京:北京工业大学出版社), 1989.
- [5] YANG Hua-zhong, WANG Hui. *Numerical Algorithm and Function Library of C Language* [M]. Beijing: Press of Science (杨华中,汪惠. 数值计算方法与 C 语言工程函数库. 北京:科学出版社), 1996.
- [6] GENTRY B M, KORB C L. Edge technique for high accuracy Doppler velocimetry [J]. *Applied Optics*, 1994, 33(24):5770- 5777.
- [7] IDA T, ANDO M, TORAYA H. Extended pseudo-Voigt function for approximating the Voigt profile [J]. *J Appl Cryst*, 2000, 33:1311- 1316.
- [8] SUN Dong-song, ZHONG Zhi-qing, ZHOU Jun, et al. Accuracy analysis of the Fabry-Perot etalon based Doppler wind lidar [J]. *Optical Review*, 2005, 12(5):409- 414.
- [9] PRESS W H, TEUKOLSKY S A, VETTERLING W T, et al. *Numerical Recipes in C++* [M]. 2nd ed, Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2000.